数学分析 B2 第 4 次习题课讲义

宗语轩

2022 春, USTC

1　写在前面

从这几次作业批改下来看, 还是有两个明显的老问题. 一是很多同学不会把思路和想法转化成严谨规范的数学语言, 或者证明过程逻辑不清晰; 二是计算能力远不如以前. 这两类问题可以说没有直接的 "特效药", 但可以通过各种办法逐步克服.

对于第一点, 首先要分清口语化用语和数学用语, 数学语言多以**数学符号**、**逻辑用词**和**数学概念**为主, 相对严谨、具体、精确; 而口语化用语多以形象直观化的词语为主, 相对空泛、形象、粗糙. 在讨论问题和打开思路中不作要求, 但在书写证明中一定用严谨规范的数学语言呈现出来. 同时务必熟练掌握整套最基本的**逻辑用语**, 整个证明过程必须符合逻辑. 最后我建议大家**多读多模仿**教材及老师板书中里那些相对完整的证明过程, 然后学会把这些题目**重新做一遍**, 把自己的证明过程跟教材或板书的证明过程进行**比较**, 看看哪些地方可以改进.

对于第二点, 一是态度端正: 勤于动笔, 谢绝跳步; 二是无所畏惧: 不怕计算, 敢于计算; 三是方法得体: 保持习惯, 掌握技巧.

再说点关于淑芬学习的题外话:

- 学习过程中要重视 **motivation(动机)**. 数学中的大部分概念、定义、定理等都是有一定的 motivation 的, 了解其中的 motivation 能帮助我们理清它们之间的关系, 助于概念的理解. 那么如何寻找 motivation 呢?

  (1) **上课听讲, 有效吸收.** 程老师在课上讲了不少相关知识的历史背景, 一些概念、定理及其证明的想法以及学习方面的方法论. 这些精华都可以化为己用;

  (2) **消化课本, 自我探索.** 通过系统学习每一章内容后, 梳理各知识点及概念定理, 归纳

[0]个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.
发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

例题习题的证明方法, 以寻找课本中蕴含的思想. 注意, 要学会多理解书中的暗示, 读书百遍其义自见.

- 如何读懂定理或题目的证明？流程如下:
  (1) **读框架**: 找出证明中你认为最重要的几个结论, 将证明按照这几个结论分步, 搭出整个证明的框架;
  (2) **读逻辑**: 重新读一遍题干, 把题干中的条件挑出来, 分别对应到证明的关键步骤中, 合并排序后串成主线;
  (3) **读思路**: 分别整理出每一步的证明思路和细节, 之后再来看整个证明, 找出整体思路;
  (4) **读技巧**: 通过关联所学的知识来掌握这些方法技巧. 最好每学完一章就对这些方法技巧进行归类, 抽象出共性, 这样有助于掌握.

- 如何加深概念理解?
  (1) **学会借助直观**: 直观起到引导、开拓思路的作用, 为问题的解决提供动机. 同时直观大体给了一个概念理解的形象化方法. 但是切记, 直观不能代替证明;
  (2) **敢于举反例**: 举反例帮助我们克服主观臆想，走向逻辑推理, 最重要的是助于我们理解概念及定理间的联系, 寻找条件的充分性和必要性. 但要适可而止, 不要沉迷其中;
  (3) **对于难以理解的定义和定理, 把关键条件和逻辑用词抽丝剥茧出来, 并按逻辑先后顺序排序, 重新整合**. 比如一致连续和一致收敛, 其与逐点相比, 根源在于“出牌“顺序不同, 或者说是研究对象不同 (一致是整体，逐点是局部). 用数学语言呈现连续: 一致连续定义中的 δ 实质是 $\inf\limits_{x\in I}\delta(\varepsilon)$，而逐点连续中的 δ 是 $\delta(x_0,\varepsilon)$(其中 $x_0\in I$ 是事先给定的). 对于逐点收敛和一致收敛也是类似.

下面是习题课正课内容, 其中作业中有代表性的问题统一放到专题选讲中.

2 专题选讲

2.1 多元函数概念的讨论和进一步理解

注意. 以下讨论中会出现很多反例, 这些反例并不要求大家记忆, 只是助于概念理解.

1 极限 & 累次极限

(1) 数学符号表示: 极限表示的是 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$, 累次极限表示的是 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$.

(2) 两者在实际中的应用: 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在说明平面上的点沿任何路径 (曲线) 趋于 (x_0,y_0) 时, 极限均存在且等于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. 同时, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=f(x_0,y)$, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 可以看成 $f(x,y)$ 沿 y 轴 (特殊路径) 趋于 (x_0,y_0) 的极限; 若 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=f(x,y_0)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 可以看成 $f(x,y)$ 沿 x 轴 (特殊路径) 趋于 (x_0,y_0) 的极限.

(3) 极限与累次极限的独立性: 两者无包含关系.

例 2.1.1 (**教材例题 9.1.4**). 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

例 2.1.2 (**教材例题 9.1.5**). 考察函数

$$f(x,y)=\frac{y}{x},\ x\neq 0.$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

(4) 极限与累次极限的联系:

例 2.1.3 (**教材习题 9.1 T16**). 证明: 当极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 存在时,
(a) 若 $y\neq y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$;
(b) 若 $x\neq x_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$.

证明. 下面只证明 (a), (b) 同理. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$ $(y\neq y_0)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 知, $\exists\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|,|y-y_0|<\delta_1$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$ 知, $\exists\delta_2(y)>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2(y)$ 时, 有

$$|f(x,y)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta(y)=\min\{\delta_1,\delta_2(y)\}$. 对 $\forall 0<|y-y_0|<\delta_1$, 取 $x_1=x_0+\dfrac{\delta(y)}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}|g(y)-A| &= |(g(y)-f(x_1,y))+(f(x_1,y)-A)| \leqslant |g(y)-f(x_1,y)|+|f(x_1,y)-A)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$ □

推论 2.1.1. 若二元函数 $f(x,y)$ 在某一点处的两个累次极限和极限均存在, 则这三个值必相等.

2 可微 & 偏导数 & 方向导数 & 梯度 记 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j}$.

(1) 偏导数是一种特殊的方向导数. 当 $\boldsymbol{e}=\pm\boldsymbol{i}$、$\pm\boldsymbol{j}$ 时, 可以看出, 偏导数分别是沿 x 轴、y 轴的方向导数;

(2) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处方向导数 (包括偏导数) 存在.
直观上看, 可微性相对于方向导数是整体，方向导数相对于可微是局部. 方向导数的研究对象只是中沿某个特定的方向路径 (这里的方向路径要求是**射线**) 趋于 (x_0,y_0), 而可微的研究对象在 (x_0,y_0) 某个邻域内, 包含了任何趋于 (x_0,y_0) 的路径.

(3) 梯度 $\mathbf{grad}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$. 通过向量投影的角度: $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}=\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{e}$ 可知, 其表示在方向导数的模取最大时的方向上，大小为方向导数模最大值的向量.
同时还可以知道, 与 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 垂直的方向导数是 0, 因而梯度 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 与等值线 $f(x,y)=a$ 在 (x_0,y_0) 处切线垂直, 即为该切线的法线. 放在三维空间看, 则梯度 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ 与等值面 $f(x,y,z)=a$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处切平面垂直, 即为该切平面的法线.

(4) 在 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微条件下, $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\to\mathbf{grad}f\xrightarrow{\boldsymbol{e}}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$. 若去掉可微条件, 则上述结论不成立. 反例如下:

例 2.1.4. 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y,\ x=0, \\ x,\ y=0, \\ 1,\ else.\end{cases}$$

则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, 但原点处的其余方向导数均不存在.

(5) 可微、偏导数和方向导数间的关系:

$$\text{各偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \begin{cases} \text{函数连续} \\ \text{各方向导数 (包括偏导数) 存在} \end{cases}.$$

偏导数有界 $\Rightarrow$ 函数连续 $\not\Leftarrow$ 偏导数存在.

有关反例如下:

例 2.1.5 (教材习题 9.2 T15). 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处偏导数存在, 但不可微.

例 2.1.6 (教材习题 9.2 T16). 函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

在原点处连续且各方向导数存在, 但不可微.

例 2.1.7. 函数

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

在原点处可微, 但偏导数不连续.

2.2 多元函数的极限、连续、可微等计算类问题

一般来说, 涉及到多元函数的极限或连续的计算会用到如下方法:

1. 利用函数的连续性和函数极限的运算性质;
2. 利用不等式放缩或夹逼原理;
3. 通过变量代换 (换元), 或者初等变形 (分母有理化, 对指数形式去对数等), 利用上述方法求解或转化为一元函数的极限或连续性问题.

   $\vdots$

至于到底是选取圆形 (球形) 邻域还是方形 (方块) 邻域, 仅仅是为了计算求解上的方便, 本身并没有限制 (两者可互相套娃). 圆形邻域在计算上便于作极坐标变换, 化繁为简; 而方形邻域没有 x, y 间联系而产生的限制, 故在放缩上便于施展手脚.

如果要说明多元函数在 (x_0, y_0) 处的极限不存在或者不连续, 一般常用如下方法:

1. 极限不存在: 寻找某一路径 (包括直线和曲线, 下同) 趋近于 (x_0, y_0), 使得多元函数在此路径下不存在极限; 或寻找两种路径趋近于 (x_0, y_0), 使得多元函数在这两个路径下极限值不同;

2. 不连续: 寻找某一路径趋近于 (x_0, y_0), 使得多元函数在此路径下不存在极限或者极限值不等于该点的函数值.

函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否可微, 只需考察

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),\ \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

是否成立即可. 在此之前须求出偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的值.

如果 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 或 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 不存在, 则 $f(x, y)$ 在 x_0 处一定不可微.

例 2.2.1. 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}.$$

解. 先求其对数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2).$$

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 因为

$$0\leqslant |xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant \frac{1}{2}r^2\ln r^2\to 0\ (r\to 0^+),$$

由夹逼原理知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=1.$$

□

例 2.2.2. 判断极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$$

是否存在, 并说明理由.

解. 考察 $y=0$, 并令 $x\to 0$. 则该极限值为 1.
考察 $y=x^2-x$, 并令 $x\to 0$. 则 $y\to 0$, 并有

$$\lim_{x\to 0}(1+x(x^2-x))^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}((1+x(x^2-x))^{\frac{1}{x^2-x^3}})^{\frac{x^2-x^3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{1-x}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

两极限值不相等. 因此极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$$

不存在. □

例 2.2.3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试问:

(1) 当 a,b 为何值时, $f(x,y)$ 在原点处连续?

(2) 当 a,b 为何值时, $f(x,y)$ 在原点处可微?

解. (1) 原题即求: 当 a,b 为何值时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ 成立. 因为

$$\begin{aligned}0\leqslant\left|(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}\right|&\leqslant\left|(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\frac{\sin(xy^2)}{2xy^2}\right|\\&\leqslant\left|\frac{a\sqrt{|x|}+x^2+y^2}{2}\right|\to 0\ ((x,y)\to(0,0)),\end{aligned}$$

由夹逼原理知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=0.$$

同时, 考察 $y=0$, 并令 $x\to 0$. 则该极限值为 0. 考察 $x=y^2$, 并令 $y\to 0$. 则 $x\to 0$, 并有

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}.$$

两极限值不相等. 因此极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}$$

不存在.

综上可知, 当 $a\in\mathbb{R}, b=0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ 成立, 即 $f(x,y)$ 在原点处连续.

(2) 接 (1). 由 (1) 知, $b\neq 0$ 时 $f(x,y)$ 在原点处连续, 从而 $f(x,y)$ 在原点处不可微. 考虑 $b=0$. 由偏导数的定义知,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0.$$

因此原题即求: 当 $b=0$, a 为何值时, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$ 成立. 而

$$0\leqslant\left|(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}\right|\leqslant\left|(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sin(xy^2)}{2xy^2}\right|\leqslant\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|\to 0\ ((x,y)\to(0,0)),$$

由夹逼原理知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=0.$$

即 $(x^2+y^2)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$. 下面考虑

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}.$$

考察 $y=0$, 并令 $x\to 0$. 则该极限值为 0. 考察 $x=y^2$, 并令 $y\to 0$. 则 $x\to 0$, 并有

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\sin y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}.$$

两极限值不相等. 因此极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}.$$

不存在. 即 $\sqrt{|x|}\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}\neq o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$.

综上可知, 当 $a=b=0$ 时, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$ 成立, 即 $f(x,y)$ 在原点处可微. $\square$

2.3 多元函数的极限、连续、可微等证明类问题

关于多元函数的极限、连续、可微等证明类问题, 有的问题直接通过定义验证即可, 而有的问题较为复杂, 这类问题一般会运用以下几类方法:

1. 在多元函数的基础上引入参数 t, 并通过多元函数构造只和变量 t 有关的单变量函数 $\varphi(t)$. 这类方法一般用于解决带有关于多元函数的限定性条件的问题 (通过对 $\varphi(t)$ 求导等方法解决), 也可对 $\varphi(t)$ 运用微分中值定理解决问题.

2. 若解决 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$, $(|x-x_0|,|y-y_0|<\varepsilon)$ 类型的证明问题, 我们通常用折线分段的方法解决, 比如利用三角不等式
$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&=|(f(x,y)-f(x,y_0))+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$
转化成两段折线后再分别考察 $|(f(x,y)-f(x,y_0))|<\varepsilon,|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.
后者的研究对象仅在直线 $y=y_0$ 上, 即满足 $\sup\limits_{|x-x_0|<\delta}|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$;
前者的研究对象是在邻域 $|x-x_0|,|y-y_0|<\varepsilon$ 内所有与 x 轴平行的直线上, 即满足 $\sup\limits_{|y-y_0|<\delta}\sup\limits_{|x-x_0|<\delta}|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$. 在这里, $\sup\limits_{|x-x_0|<\delta}|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ 要满足 y 上的一致性.
对于
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$$
也是类似的. 具体选哪种取法依据题干中的条件确定.
高维情况亦类似. 同时也可能需要采用其他的折线分段法解决, 如**教材习题 9.1 T19**.

3. 若已知函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在偏导数, 也可以引入函数
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), & x=x_0,\end{cases}\qquad h(y)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}, & x\neq y_0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), & y=y_0.\end{cases}$$
利用 $g(x)$, $h(y)$ 在 (x_0,y_0) 处的连续性, 结合题干条件提供的性质, 一般配合第 2 点中分段的方法使用.
$\vdots$

注意. 这里要区分对两点通过构造单变量函数用微分中值定理及折线法中对每段折线分别用微分中值定理, 具体在后面的例子中会有所体现.

我们先以三道作业题为例:

例 2.3.1 (**教材综合习题 9 T8**). 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, $f \in C^1(D)$. 证明: 若

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D,$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

分析. 注意题干条件: D 是包含原点的凸区域, 这表明连接 D 内任何一点 (x,y) 至原点的线段均在 D 内. 由此自然想到引入参数 t 并在 $f(x,y)$ 基础上构造变量 t 有关的单变量函数. 结合题干条件, 我们构造 $\varphi(t) = f(tx,ty)$ $(t \in [0,1])$.

证明. $\forall (x,y) \in D$, 对 $\forall t \in [0,1]$, 由 D 的凸性可知, $(tx,ty) \in D$. 构造 $\phi(t) = f(tx,ty)$ $(t \in [0,1])$, 则有

$$\phi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0.$$

因此 $f(x,y) = \phi(1) = \phi(0) = f(0,0)$. 由 (x,y) 的任意性知, $f(x,y)$ 是常数. □

例 2.3.2 (**教材综合习题 9 T9**). 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.$f(0,0) = 0$. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1, g_2, 使得

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

分析. 由题干信息, 第一反应肯定是折线法分段:

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = (f(x,y) - f(x,0)) + (f(x,0) - f(0,0)).$$

此时, 如果对两部分分别用微分中值定理, 即

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta_1 y)y + \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_2 x, 0)x$$

我们无法从 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\theta_1 y), \dfrac{\partial f}{\partial x}(\theta_2 x, 0)$ 得知其确切的位置信息, 因而无法判断其连续性. 退一步, 我们采取更直接的方式:

$$f(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y}y + \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}x.$$

此时我们只需适当的加工即可达到我们的目标.

证明. 构造

$$g_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x}, & x \neq 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), & x = 0, \end{cases} \qquad g_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y) - f(x,0)}{y}, & y \neq 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0), & y = 0. \end{cases}$$

则

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

显然, $g_1(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处连续, $g_2(x,y)$ 在 $y\neq 0$ 处连续. 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}g_1(x,y)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g_1(0,0),\\ \lim_{y\to 0}g_2(x,y)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{x}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=g_2(x,0).\end{aligned}$$

故 $g_1(x,y),g_2(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续. □

例 2.3.3 (**教材综合习题 9 T10**). 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域 U 上有定义. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 证明: 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0,y_0) 处连续, 那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微. (这里我们不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处连续)

分析. 由题干信息, 第一反应还是折线法分段:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))+(f(x,y)-f(x,y_0)).$$

此时, 如果对两部分分别用微分中值定理, 即

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_x(y-y_0))(y-y_0).$$

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 故有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_x(y-y_0))\to\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ ((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

但我们不知道 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 的连续性, 故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y_0)$ 得知其确切的位置信息, 因而无法判断其连续性. 退一步, 我们采取更直接的方式:

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

此时我们只需适当的加工即可达到我们的目标.

证明. 构造函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), & x=x_0.\end{cases}$$

利用

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g(x_0),$$

由微分中值定理, 存在 $\theta_x\in(0,1)$, 满足

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0)&=(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))+(f(x,y)-f(x,y_0))\\
&=g(x)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_x(y-y_0))(y-y_0)\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&+\left(g(x)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_x(y-y_0))-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0)
\end{aligned}$$

而

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_x(y-y_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\text{在}(x_0,y_0)\text{处连续}\right),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

故

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 所以 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微. □

注意. 如果按

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))+(f(x,y)-f(x_0,y)).$$

进行折线法分段, 则无法证明该结论. 原因请读者自行思考 (可参考上述方法总结的第 2 条).

下面我们再来看两个三元函数的例子:

例 2.3.4. 设 $f(x,y,z)$ 在球体 $S:x^2+y^2+z^2\leqslant 9$ 上有连续的偏导数, 且满足 $|\nabla f|\leqslant 1$ 和 $f(0,0,0)=1$. 试证:

$$|f(x,y,z)|\leqslant 4,\quad (x,y,z)\in S.$$

分析. 由偏导数的连续性及 $|\nabla f|$ 的有界性容易想到用微分中值定理解决, 同时为保证到利用 $|\nabla f|$, 引入参数 t 并在 $f(x,y)$ 基础上构造变量 t 有关的单变量函数, 最后运用不等式等技巧解决.

证明. 对 $\forall(x,y,z)\in S$, 构造 $\varphi(t)=f(tx,ty,tz)$ $(t\in[0,1])$. 容易验证 $(tx,ty,tz)\in S$. 由微分中值定理, $\exists\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\varphi(1)=1+\varphi(1)-\varphi(0)=1+\varphi'(\theta)\\&\leqslant 1+x\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x,\theta y,\theta z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(\theta x,\theta y,\theta z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(\theta x,\theta y,\theta z)\\&=1+(x,y,z)\cdot\nabla f\\&\leqslant 1+|(x,y,z)||\nabla f|\quad(\textbf{Cauchy-Schwarz}\text{ 不等式})\\&\leqslant 4.\end{aligned}$$

□

注意. 如果对 $f(x,y,z)$ 进行折线法分段成三部分, 再利用微分中值定理, 则三个含参偏导数不在同一位置上, 不能利用 $|\nabla f|$, 故无法直接证明该结论.

例 2.3.5 (教材综合习题 9 T7). 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u=f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明: u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

提示. 利用有界闭集的连续函数必有界的性质, 结合折线法及微分中值定理即可.

证明. $\forall(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, $\exists M>0$, 使得

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)|\leqslant M,\quad |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)|\leqslant M\quad(\forall|x-x_0|\leqslant 1,|y-y_0|\leqslant 1,|z-z_0|\leqslant 1).$$

利用折线法进行分段:

$$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=(f(x,y,z)-f(x_0,y,z))+(f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z))+(f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)).$$

对 $\forall|x-x_0|\leqslant 1,|y-y_0|\leqslant 1,|z-z_0|\leqslant 1$, 由微分中值定理, $\exists\theta,\eta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)-f(x_0,y,z)|&=\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y,z)(x-x_0)\right|\leqslant M|x-x_0|,\\|f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)|&=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\eta(y-y_0),z)(y-y_0)\right|\leqslant M|y-y_0|\end{aligned}$$

因为 u 关于 z 连续, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_0>0$, 当 $|z-z_0|<\delta_0$ 时, 有

$$|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

并取 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3M}, \delta_0, 1\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta, |z-z_0|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)| &\leqslant |f(x,y,z)-f(x_0,y,z)|+|f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)| \\ &\quad +|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)| \\ &< M|x-x_0|+M|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{3} \\ &< M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

由 (x_0,y_0,z_0) 的任意性知, u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. □

注意. 如果按如下两种情况:

$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0) = (f(x,y,z)-f(x,y,z_0))+(f(x,y,z_0)-f(x,y_0,z_0))+(f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)).$

$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0) = (f(x,y,z)-f(x,y_0,z))+(f(x,y_0,z)-f(x,y_0,z_0))+(f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)).$

进行折线法分段, 则无法利用 u 关于 z 连续的信息证明该结论 (这里可参考上述方法总结的第 2 条).

2.4 多元函数的极值、条件极值和最值问题

求多元函数的**最值**问题 (包括部分极值问题, 具体看题目条件和要求) 方法大体如下:

1. 如果函数定义在有界闭区域 D 上. 则先求出 D 的内部所有驻点及不可导点, 并求出相应的函数值. 同时我们还须考虑边界 ∂D 上的最值情况 (方法类似), 结合两者的最值情况进行比较, 得到函数在 D 上的最值情况. 如果函数定义在开区域 D 上, 则需要研究自变量趋于边界 ∂D 上的取值变化, 来说明驻点处的最值情况;

2. 如果函数定义在无界区域上, 则需要研究自变量趋于无穷大时函数取值变化, 来说明驻点处的最值情况; 或者去掉明显取不到最值的无界子区域部分, 使之转化为有界区域上的最值问题.

   ⋮

除此之外, 有的题目要求让我们更精细判断多元函数在各驻点处的**极值**情况 (这里要区分极值和最值. 极值是**局部**概念, 最值是**整体**概念). 对此, 我们运用二次型这一工具来解决问题.

关于运用二次型判定多元函数的极值问题, 教材上主要给出了二元函数的情形, 这里我们推广到更高维空间中进行一般化处理.

在应用的时候,特别重要的是 Taylor 公式的前三项.现在把它们具体写出来:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{a})h_ih_j+\cdots. \tag{6}$$

如果记

$$Hf(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix},$$

那么式(6)可以写成

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+Jf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}(h_1,\cdots,h_n)Hf(\boldsymbol{a})\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}+\cdots.$$

这里 Hf 称为 f 的 Hesse 方阵,它是一个 n 阶对称方阵.

定理 9.11.5 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 n 元函数 f 的一个驻点,函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某一邻域内有连续的二阶偏导数.

(1) 如果 Hesse 方阵 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格正(负)定方阵,那么 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个严格极小(大)值点.

(2) 如果 Hesse 方阵 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 是不定方阵,那么 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的极值点.

证明 (1) 设 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格正定方阵.由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某一邻域上有连续的二阶偏导数,由定理 9.10.4,得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|^2)\quad(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

又因 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的驻点,故上式可写为

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|^2). \tag{2}$$

设 $\|\boldsymbol{y}\|=1$,它的全体就是单位球的球面 $\partial B_1(\boldsymbol{0})$.因为 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 严格正定,所以

$$(y_1,\cdots,y_n)Hf(\boldsymbol{x}_0)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)y_iy_j>0.$$

这是单位球面上的连续函数,而单位球面是一个有界闭集,因而它在单位球面上的某点取得最小值,设此最小值为 $m>0$,从而有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y}\geqslant m>0.$$

现在

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2\left(\frac{\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{h}\|}Hf(\boldsymbol{x}_0)\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)\geqslant\frac{m}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2,$$

把它代入式(2),得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)\geqslant\|\boldsymbol{h}\|^2\left(\frac{m}{2}+o(1)\right)>0,$$

即当 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小时,有 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})>f(\boldsymbol{x}_0)$.这就证明了 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得严格的极

小值.

(2) 因为 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$是不定方阵,故存在 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$,使得

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}<0<\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{q}.$$

在式(2)中分别取 $\boldsymbol{h}$ 为 $\varepsilon\boldsymbol{p}$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{q}$,得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p})\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\\ &= \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}+o(1)\right)\varepsilon^2, \qquad (3)\end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{q})-f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{q}+o(1)\right)\varepsilon^2. \qquad (4)$$

由式(3)和(4)可知,只要取 ε 充分小,就有

$$f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{p})<f(\boldsymbol{x}_0)<f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{q}).$$

这正好说明 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的极值点. □

关于实对称方阵正定性的判断准则如下:

(6) 方阵 S 的顺序主子式都是正的,这里所谓方阵 S 的顺序主子式是指如下的 n 个主子式:对于 $k=1,2,\ldots,n$,

$$S\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}s_{11}&s_{12}&\cdots&s_{1k}\\s_{21}&s_{22}&\cdots&s_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\s_{k1}&s_{k2}&\cdots&s_{kk}\end{vmatrix};$$

满足如上条件即可判定实对称方阵 S 正定.

关于实对称方阵的负定性, 仅需把上图中方阵 S 的所有元素 s_{ij} 替换成 $-s_{ij}$, 然后按上图的判别法则验证即可.

关于用二次型 (Hesse 方阵) 求多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值问题步骤如下:

1. 通过解方程组 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n$, 求出驻点 $\boldsymbol{x_0}$;
2. 如果函数 f 在驻点 $\boldsymbol{x_0}$ 的某个邻域上有二阶连续偏导数, 则考察 Hesse 方阵 $\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x_0})=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_0}}$, 并按上述法则进行判断;
3. 如果 Hesse 方阵 $\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x_0})$ 是半定的, 则需要进一步判别;
4. (**一般不需要**) 考察 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,2,\cdots,n$, 不存在的点是否为极值点;
5. (**一般不需要**) 考察没有二阶连续偏导数的驻点是否为极值点.

我们以两道作业题为例:

例 2.4.1 (**教材综合习题 9 T14**). 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\right\}$ 上的最大值和最小值.

解. 先考虑 D 的内部. 令

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2-1=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy=0.$$

解得驻点 $(0,\pm1)$ 和 $(\frac{1}{2},0)$. 驻点对应的函数值如下:

$$f(0,\pm1)=0,\quad f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}.$$

再考虑 $f(x,y)$ 在 $\partial D=\left\{(x,y)|x^2+y^2=2\right\}$ 上的最值. 把 $x^2+y^2=2$ 代入得

$$h(x):=f(x,y)=-x^3+x^2+x,\ x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

利用

$$h'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$$

解得驻点 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$. 因为

$$h(1)=1,\quad h(-\frac{1}{3})=-\frac{5}{27},\quad h(\sqrt{2})=2-\sqrt{2},\quad h(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}.$$

综上, 通过比较可知, $f(x,y)$ 在 D 上的最大值是 $2+\sqrt{2}$, 最小值是 $-\frac{1}{4}$. □

例 2.4.2 (**教材综合习题 9 T16**). 设 $a_i=0\ (i-1,2,\cdots,n),p>1$. 证明:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

并讨论等号成立的条件.

证明. 令 $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 即证: $a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p\geqslant n\left(\frac{a}{n}\right)^p=\frac{a^p}{n^{p-1}}$.
若 $a=0$, 则结论显然成立.
若 $a>0$, 记 $f(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p-\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n-a)$, 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a_1}=pa_1^{p-1}-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial a_2}=pa_2^{p-1}-\lambda=0,\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial a_n}=pa_n^{p-1}-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=a_1+a_2+\cdots+a_n-a=0.\end{cases}$$

解得驻点 $(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})$. 考虑边界处 f 的取值, 对满足 $a_i>0$ 的所有 a_i 按上述方法求条件极值, 同理可知, 在 a_i 均相等处为驻点. 又因为 $f\geqslant 0$ 且连续, 故 f 的最小值是

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} k\left(\frac{a}{k}\right)^p=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a^p}{k^{p-1}}=\frac{a^p}{n^{p-1}}.$$

等号仅在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 下成立. □

注意. 如果我们要考察函数 f 在驻点 $(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})$ 处的极值情况, 则有

$$\boldsymbol{H}f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})=\begin{pmatrix} p(p-1)a_1^{p-2} & & & \\ & p(p-1)a_2^{p-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(p-1)a_n^{p-2}\end{pmatrix}.$$

由 $p>1$ 可知, Hesse 方阵 $\boldsymbol{H}f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})$ 正定, 故 f 在 $(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})$ 处取到极小值.

2.5 多元函数的重积分

这一块在知识理解上没有特别难的地方, 考试要求基本就是掌握重积分的计算或者计算型证明. 难点一个是计算能力, 另外就是技巧要求较高. 掌握以下方法和要求, 把课本习题拿来练手足够了.

1. 学会对积分换次序, 分段分区域处理积分;

2. 确定一些较复杂的积分区域时一定要画出积分区域的示意图并加以检验. 画示意图时一定要充分利用区域所在位置 (象限/卦限)、曲线的交点 (曲面的交线) 等关键信息.

3. 要熟练掌握不定积分公式, 各种变量代换、换元, 不等式放缩等技巧方法以解决问题. 要学会利用函数的特性 (包括对称性、奇偶性、中心对称性等) 及积分区域的对称性等性质简化积分计算. 这些方法经常配合第 1 点使用.

4. 换元后注意新积分区域的定义域, 同时切记不要忘记 **Jacobi**;

5. 关于 n 重积分的问题要学会通过归纳的思想, 找出其中的递推关系式, 并利用递推的方法进行求解.

3 补充习题

1 设有一条曲线由如下方程组定义:

$$\begin{cases} x = yz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

请判断这条曲线在不在一个平面上, 并给出理由.

提示. 直接在曲线上找四个点, 验证这四个点不在同一个平面上.

2 教材综合习题 9 T13 设 $f(x, y, z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$. 如果 $f(x, 0, 0) > 0$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 成立. 证明: 对 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) > 0$ 均成立.

提示. 在连接点 $(x + y + z, 0, 0)$ 和点 (x, y, z) 的线段上用微分中值定理即得.

注意. 如果对 $f(x, y, z)$ 进行折线法分段成三部分, 再利用微分中值定理, 则三个含参偏导数不在同一位置上, 故无法直接证明该结论.

3 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 在的凸区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有偏导数. 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 有界, 证明: $f(x, y)$ 在 D 上一致连续.

提示. 选取 D 中任意两点, 连线后用微分中值定理.

4 设 $f(x, y)$ 有连续的偏导数, 且 $f(0, 1) = f(1, 0)$. 试证: 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 至少存在两个不同的点满足方程

$$y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

证明. 记 $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$, 则 $F \in C^1$ 且 $F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = F(2\pi)$. 由微分中值定理, $\exists a \in (0, \frac{\pi}{2}), b \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, 使得

$$F'(a) = F'(b) = 0.$$

利用

$$F'(\theta) = -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

可知, 存在两个不同的点满足方程

$$y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

□

5 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 若对 $t>0, q\in\mathbb{R}$, 有

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^q f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 f 是 q 次齐次函数. 证明: f 是 q 次齐次函数的充分必要条件是对 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})=qf(\boldsymbol{x}).$$

证明. 必要性: 等式两边对 t 求导, 得:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,\cdots,tx_n)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,\cdots,tx_n)=qt^{q-1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

等式两边同乘 t, 利用 f 的 q 次齐次性, 有

$$tx_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,\cdots,tx_n)+\cdots+tx_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,\cdots,tx_n)=qf(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n).$$

最后把 $(tx_1,\cdots,tx_n)$ 换成 $(x_1,\cdots,x_n)$ 即可.

充分性: 构造 $\varphi(t)=\dfrac{f(tx_1,\cdots,tx_n)}{t^q}$. 则有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{t^q(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,\cdots,tx_n)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,\cdots,tx_n))-qt^{q-1}f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)}{t^{2q}}\\&=\frac{t^{q-1}(tx_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,\cdots,tx_n)+\cdots+tx_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,\cdots,tx_n))-qt^{q-1}f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)}{t^{2q}}\\&=0.\end{aligned}$$

因此

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^q\varphi(t)=t^q\varphi(1)=t^q f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

□

6 教材综合习题 9 T4 设 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次可微函数. 证明: 若方程 $f(x,y,z)=0$ 隐含函数 $z=\varphi(x,y)$ (即 $f_z'\neq 0$), 则 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数.

证明. 利用隐函数定理, 得:

$$\varphi_x'=-\frac{f_x'}{f_z'},\quad \varphi_y'=-\frac{f_y'}{f_z'}.$$

由上题结论知,

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=nf(x,y,z)=0.$$

故有

$$x\varphi_x'+y\varphi_y'=-\frac{xf_x'+yf_y'}{f_z'}=z=\varphi(x,y).$$

再利用上题结论可知, $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数. □

7 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一阶连续可微函数, 满足 $\nabla f\neq 0$ 且

$$y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \forall (x,y)\in D.$$

求 $f(x,y)$ 的等值线方程.

解. 设 $x=x(t),y=y(t)$ 是等值线 $f(x,y)=C$ 的参数方程. 则

$$f(x(t),y(t))=C.$$

两边对 t 求导, 有

$$x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))=0.$$

利用 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, 得

$$x(t)x'(t)-y(t)y'(t)=0$$

即

$$(x^2(t)-y^2(t))'=0.$$

故 $f(x,y)$ 的等值线方程是

$$x^2-y^2=C_0.$$

□

8 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\right\}$, 二元函数 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续, 在 D 上满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f.$$

证明:

(1) 如果 $f\Big|_{\partial D}\geqslant 0$, 则 $f\Big|_{D}\geqslant 0$;

(2) 如果 $f\Big|_{\partial D}>0$, 则 $f\Big|_{D}>0$.

证明. (1) 反证: 若存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $f(x_0,y_0)<0$. 因为 $f(x,y)$ 在有界集 $\overline{D}$ 中连续, 且 $f\Big|_{\partial D}\geqslant 0$, 故存在 $(x_1,y_1)\in D$, 使得 $f(x,y)$ 在 (x_1,y_1) 处取到最小值, 且 $f(x_1,y_1)<0$. 而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_1)=f(x_1,y_1)<0,$$

故 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,y_1)$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_1)$ 中至少有一个小于 0, 这与 $f(x,y)$ 在 (x_1,y_1) 处取到最小值矛盾.

(2) 构造函数 $g(x,y)=f(x,y)-\varepsilon(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$, 并取 $\varepsilon>0$, 使得 $g\Big|_{\partial D}\geqslant 0$. 而 $g(x,y)$ 在 D 上满足

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\varepsilon\mathrm{e}^x)+(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\varepsilon\mathrm{e}^y)=f-\varepsilon(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)=g,$$

且 $g(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续, 由 (1) 可知 $g\Big|_D\geqslant 0$, 故 $f\Big|_D>0$. □

9 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0<x,y<1\right\}$, $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey$. 如果 $f\Big|_{\partial D}\leqslant 0$, 证明: $f\Big|_D\leqslant 0$.

证明. 若 $f(x,y)$ 在 ∂D 上取到最大值, 则命题得证;
若 $f(x,y)$ 在 D 中取到最大值, 即存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取到最大值. 则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2ax_0+2by_0+d=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=2cy_0+2bx_0+e=0.$$

由此可得

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}x_0(2ax_0+2by_0+d)+\frac{1}{2}y_0(2cy_0+2bx_0+e)+\frac{1}{2}(dx_0+ey_0)=\frac{1}{2}(dx_0+ey_0).$$

由 $f\Big|_{\partial D}\leqslant 0$ 可知,

$$f(x,0)=x(ax+d)\leqslant 0\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

若 $d>0$, 取 $0<x_0<\min\{\left|\frac{d}{a}\right|,1\}$ (仅考虑$a\neq 0$,因为$a=0$显然成立), 则 $f(x_0,0)>0$, 矛盾. 所以 $d\leqslant 0$. 同理, $e\leqslant 0$. 故 $f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(dx_0+ey_0)\leqslant 0$. 所以 $f\Big|_D\leqslant 0$. □

10 设 $C>0$ 是一个常数, 又设函数 $f(x,y)$ 满足: 对于任何平面上的点 (x,y), 存在 $a(x,y)$, $b(x,y)$ 使得对于任何实数 h, k 满足 $|h|+|k|\leqslant 1$, 有

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)-a(x,y)h-b(x,y)k|\leqslant C(|h|+|k|)^{\frac{3}{2}}.$$

求证: f 有一致连续的偏导数.

证明. 因为

$$0\leqslant\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-a(x,y)h-b(x,y)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqslant C\frac{(|h|+|k|)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqslant C(|h|+|k|)^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{h,k\to 0}0.$$

由夹逼原理知,

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-a(x,y)h-b(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=a(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=b(x,y)$. 现只需证明 $a(x,y)$ 一致连续 ($b(x,y)$ 同理).
一方面, 取 $k=0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x+h,y)&=f(x,y)+a(x,y)h+O(h^{\frac{3}{2}}),\\
f(x+2h,y)&=f(x+h,y)+a(x+h,y)h+O(h^{\frac{3}{2}}),\\
f(x+2h,y)&=f(x,y)+a(x,y)2h+O(h^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

对上面三式处理变形后, 得

$$a(x+h,y)=a(x,y)+O(h^{\frac{1}{2}}).$$

即存在 $C_1>0$, 使得

$$|a(x+h,y)-a(x,y)|\leqslant C_1h^{\frac{1}{2}}.$$

另一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x,y+h)&=f(x,y)+b(x,y)h+O(h^{\frac{3}{2}}),\\
f(x+h,y+h)&=f(x,y+h)+a(x,y+h)h+O(h^{\frac{3}{2}}),\\
f(x+h,y+h)&=f(x,y)+a(x,y)h+b(x,y)h+O(h^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

对上面三式处理变形后, 得

$$a(x,y+h)=a(x,y)+O(h^{\frac{1}{2}}).$$

即存在 $C_2>0$, 使得

$$|a(x,y+h)-a(x,y)|\leqslant C_2h^{\frac{1}{2}}.$$

记 $C'=\max\{C_1,C_2\}$, 由 x,y 的任意性知, 对任何实数 h, k 满足 $|h|+|k|\leqslant 1$, 有

$$|a(x+h,y+k)-a(x,y)|\leqslant|a(x+h,y+k)-a(x+h,y)|+|a(x+h,y)-a(x,y)|\leqslant C'(h^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{1}{2}})$$

故对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{(\dfrac{\varepsilon}{C'})^2,1\right\}$, 当 $0<|h|+|k|<\delta$ 时, 有

$$|a(x+h,y+k)-a(x,y)|\leqslant C'(h^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{1}{2}})\leqslant C'\sqrt{|h|+|k|}<C'\sqrt{\delta}<\varepsilon.$$

故 $a(x,y)$ 一致连续. 同理, $b(x,y)$ 也一致连续. $\square$

11 (1) 设 $u = ax + by$, $v = cx + dy$, 其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是正交常数矩阵. 证明: 对平面上任意的光滑 (至少有二阶连续偏导数) 数量场 f, 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(2) 设变换 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 有二阶连续的偏导数. 已知对平面的任意光滑数量场 f, 下列等式成立

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(a) 证明: 参数变换的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

(b) 证明: $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是常值矩阵.

证明. 直接计算可知

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= f''_{uu} {u'_x}^2 + 2 f''_{uv} u'_x v'_x + f''_{vv} {v'_x}^2 + f'_u u''_{xx} + f'_v v''_{xx}, \\ f''_{yy} &= f''_{uu} {u'_y}^2 + 2 f''_{uv} u'_y v'_y + f''_{vv} {v'_y}^2 + f'_u u''_{yy} + f'_v v''_{yy}. \end{aligned}$$

(1) 利用正交矩阵的性质, 结合题干, 直接代入上式验证即可.

(2) (a) 原题条件等价于对平面的任意光滑数量场 f, 有

$$\begin{aligned} f''_{uu}({u'_x}^2 + {u'_y}^2 - 1) + 2 f''_{uv}(u'_x v'_x + u'_y v'_y) + f''_{vv}({v'_x}^2 + {v'_y}^2 - 1) \\ + f'_u(u''_{xx} + u''_{yy}) + f'_v(v''_{xx} + v''_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

分别取 $f = u, v, u^2, uv, v^2$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \\ v''_{xx} + v''_{yy} = 0 \\ {u'_x}^2 + {u'_y}^2 = 1 \\ u'_x v'_x + u'_y v'_y = 0 \\ {v'_x}^2 + {v'_y}^2 = 1. \end{cases}$$

其中后三个等式推出 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

(b) 让 ${u'_x}^2 + {u'_y}^2 = 1$ 分别对 x, y 求偏导, 得

$$u'_x u'_{xx} + u'_y u'_{yy} = 0, \quad u'_x u'_{xy} + u'_y u'_{yy} = 0.$$

由 ${u'_x}^2 + {u'_y}^2 = 1$ 知 u'_x, u'_y 不全为 0, 故

$$\begin{vmatrix} u'_{xx} & u'_{xy} \\ u'_{xy} & -u'_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_{xx} & u'_{xy} \\ u'_{xy} & u'_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

即 ${u'_{xx}}^2 + {u'_{xy}}^2 = 0$, 所以 $u'_{xx} = u'_{xy} = u'_{yy} = 0$. 故 u'_x, u'_y 是常数. 同理,v'_x, v'_y 是常数.

所以 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是常值矩阵. □

思考题 1 考虑函数 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\boldsymbol{x}) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 - x_3$. 目标函数 $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$.

(1) 证明: 在 $g(x) = 0$ 的限制下 f 没有极值点;

(2) 令 $B = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : g(\boldsymbol{x}) = 0, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$. 证明: f 限制在 B 上有极大极小值;

(3) 证明: f 在 B 上的极大极小值点 $b(b_1, b_2)$ 一定满足 $b_1^2 + b_2^2 = 1$, 并计算出极值点;

(4) 考虑 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, \sin 3\alpha)$. 证明: $\varphi(\mathbb{R}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : g(\boldsymbol{x}) = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$;

(5) 求函数 $f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的极大极小值点, 并与 (3) 的结果进行比较.

思考题 2 给定 (闭) 曲面 $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) | f(x_1, x_2, x_3) = 0, f \in C^1(\mathbb{R}^3)\right\}$. 按照空间点集的方式定义 V 的直径 $\mathrm{diam}(V)$.

(1) 证明: 如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 满足 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \mathrm{diam}(V)$, 则 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \perp T_{\boldsymbol{x}}V, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \perp T_{\boldsymbol{y}}V$, 即连接 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的向量是 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 处切平面的法向量;

(2) 令 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 1$. 证明:$\mathrm{diam}(V) = 2\sqrt[4]{3}$;

(3) 令 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 - 1$. 证明:$\mathrm{diam}(V) = 2\sqrt[4]{\dfrac{11}{6}}$.

思考题 3 (匀质球体的引力势能) 给定球体 $B(0,R)\subset\mathbb{R}^3$ 及 $\mathbb{R}^3$ 中球外一点 $\boldsymbol{x}$. 求

$$\phi(\boldsymbol{x})=\int_{B(0,R)}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

4 写在最后

驻足于知识的美妙中，欣赏其中的艺术，有时比追求更多知识更具意趣.

—— 宗语轩